架空索道の荷重点の速度について

架空索道の荷重点の速度について

佐 々 木 功

Isao SASAKI

On the velociy of running load on the Cable way.

I. 緒 言

架空索道における主索張力およびその他の問題を解くにあたつては，いままで静的な理論——垂曲線，または抛物線形による——によつているが，これらはいずれも荷重が任意点において静止したものとし，その際の力の平衡条件より理論を展開している。これは現実に荷重がある速度をもつて走行している場合とはおのずからその索張力その他において相異があることは当然である。

それ故，荷重が走行している場合の架空索道の主索張力について研究する必要が生ずる。この研究には，既報[1]のものよりみて，荷重の走行について理論的に考えてみることが先決であると思われるので，この報告において荷重速度について考察した。

II. 荷重点の速度

既報[1]の(6)式を変形して

$$\frac{d(v^2)}{dx}=2g\left(\frac{dy}{dx}-\mu\right)-2\mu\left(v^2\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) \qquad \cdots\cdots (1)$$

をうる。

いま，上式を簡単な形で示めせば

$$\frac{dV}{dx}+\varphi(x)\,V=\Phi(x) \qquad \cdots\cdots (2)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned} &V=v^2\\ &\varphi(x)=2\mu\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\\ &\Phi(x)=2g\left(\frac{dy}{dx}-\mu\right)\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (3)$$

しかるに，式(2)は一階線状微分方程式であるから

$$V=e^{-\int_0^x\varphi(x)\,dx}\left\{\int_0^x\Phi(x)e^{\int_0^x\varphi(x)\,dx}dx+c\right\} \qquad \cdots\cdots (4)$$

上式において

$$\int_0^x\varphi(x)\,dx=A$$

とすれば

$$V=\frac{1}{e^A}\left\{\int_0^x \Phi(x)\,e^A\ dx+c\right\}=\frac{1}{e^A}\left\{\int_0^x e^A\left(2g\frac{dy}{dx}-2g\mu\right)dx+c\right\} \quad\cdots\cdots(5)$$

(5)式において，もし x の値の如何にかかわらずAすなわち $\int_0^x \varphi(x)\,dx$ が近似的に一定とみられるならば，上式はさらに

$$V=\int_0^x\left(2g\frac{dy}{dx}-2g\mu\right)dx+c=2g(y-\mu x)+c \quad\cdots\cdots(6)$$

となる。いま $x=0$ のときに $y=0$ であり，同時に V も 0 となるから $C=0$ である。したがつて(6)式は

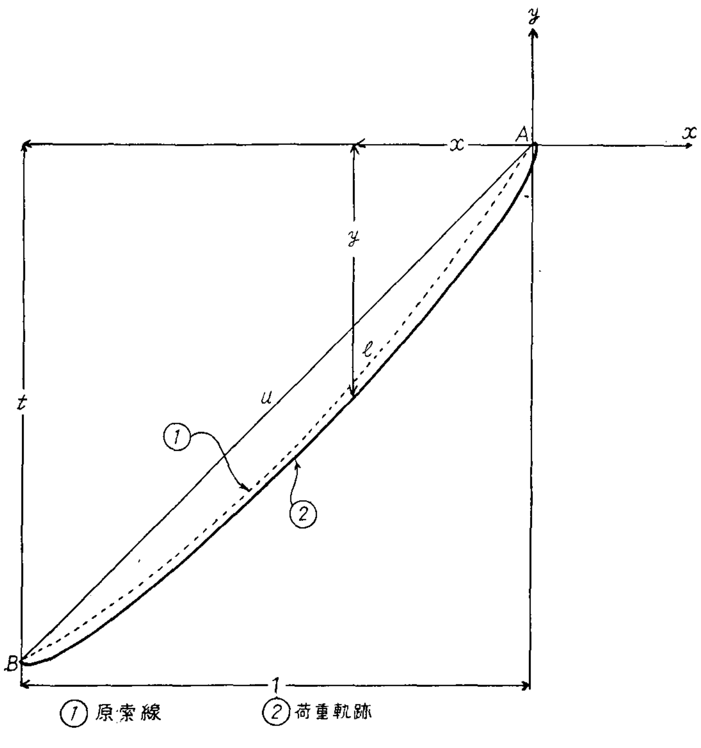
$$V=2g(y-\mu x) \quad\cdots\cdots(7)$$

となる。すなわち，荷重点の速度は，荷重点の軌跡 $y=f(x)$ と滑車と索の摩擦係数 μ にのみ関係することとなり，非常に簡単に計算しうる。

Ⅲ. 考　　察

架空索道の荷重点の走行速度は前節より理解できるように，荷重点の軌跡および滑車と索との間の摩擦係数に関係するので，荷重速度について考察するに際して（摩擦係数は走行中一定とみなしうるものと考えられるから）まずその軌跡について考えてみたい。

荷重が索の自重に対して極めて小さいと見られる場合，換言すれば荷重が0のときには，その軌跡は原索線形――垂曲線――となる。また，他方，荷重が∞に近いとみられる場合には，上下両支点を焦点とし，長軸が索長に等しいような楕円になることは周知の事実である。もし荷重が0→∞までとりうるものとすれば，その場合の荷重の走行速度は荷重点の軌跡が楕円の場合最大となるから，今後



の考えを楕円軌跡の場合について進めて行くことにする。

いま下図のごとく支点Aに座標原点をとり，原点を通り水平線に平行な軸をx軸，これに垂直な軸をy軸とすれば，支点A，Bを焦点とし，索長lを長軸とする楕円曲線の式は既報[2)]より次式で与えられる。

$$y=\frac{t\left(\frac{1}{2}+x\right)-l\sqrt{\left(l^2-u^2\right)\left\{\frac{1}{4}\left(l^2-t^2\right)-\left(\frac{1}{2}+x\right)^2\right\}}}{l^2-t^2}-\frac{t}{2} \quad \cdots\cdots (8)$$

ここに：

t ：支点A，B間の水平距離を1とした場合のA，B間の高低差

u ：A，Bの斜距離

l ：索長

前述より理解しうるように，Aすなわち$\int_0^x \varphi(x)\,dx$が一定とみなしうるか否かという問題について考えねばならない。

そこで上述の楕円式より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t}{l^2-t^2}+\frac{l}{l^2-t^2}\,\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(l^2-u^2\right)}{\sqrt{\left(l^2-u^2\right)\left\{\frac{1}{4}\left(l^2-t^2\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right\}}} \quad \cdots\cdots (9)$$

さらに(9)式を微分して

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{4}\,\frac{l\left(l^2-u^2\right)^2}{\left[\left(l^2-u^2\right)\left\{\frac{1}{4}\left(l^2-t^2\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right\}\right]^{3/2}} \quad \cdots\cdots (10)$$

(9)，(10)両式よりAは

$$\begin{aligned}A&=\int_0^x \varphi(x)\,dx\\&=\int_0^x 2\mu\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\\&=\int_0^x 2\mu\frac{\frac{1}{4}\,\frac{l\left(l^2-u^2\right)^2}{\left[\left(l^2-u^2\right)\left\{\frac{1}{4}\left(l^2-t^2\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right\}\right]^{3/2}}}{1+\left[\frac{t}{l^2-t^2}+\frac{l}{l^2-t^2}\,\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(l^2-u^2\right)}{\sqrt{\left(l^2-u^2\right)\left\{\frac{1}{4}\left(l^2-t^2\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right\}}}\right]^2}\,dx \quad \cdots\cdots (11)\end{aligned}$$

上式(11)よりAの値を数値計算すれば一定とみなしうるか否かが判明するわけである。しかし数値計算を行うに当つて，索長l，および勾配tについての限界を考えておく必要がある。

索長lがyにおよぼす影響は式(8)の軌跡曲線からでは一見して判明しないので，次のように考えてみる。

(9)式よりyを最大ならしめるxを求めてみる。すなわちかかる条件に適するxは(9)式の右辺を0ならしめる値であるから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t}{l^2-t^2}+\frac{l}{l^2-t^2}\,\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(l^2-u^2\right)}{\sqrt{\left(l^2-u^2\right)\left\{\frac{1}{4}\left(l^2-t^2\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right.}}=O$$

$$t\sqrt{\left(l^2-u^2\right)\left\{\frac{1}{4}\left(l^2-t^2\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right\}}=-l\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(l^2-u^2\right)$$

両辺を2乗して $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ について整理すれば

$$4\left(l^2-t^2\right)\left(l^2-1\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=t^2\left(l^2-t^2\right)$$

しかるに $l^2-t^2 \fallingdotseq 0$ であるから

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{t^2}{4\left(l^2-1\right)}$$

$$x+\frac{1}{2}=\pm\frac{t}{2\sqrt{(l^2-1)}}$$

x はつねに0～－1であるから

$$x=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{l^2-1}}{l^2-1}+1\right) \quad \cdots\cdots (12)$$

上式を(8)式に代入して，y_{max} を求めらば

$$y_{max}=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{l^2-1}+t\right) \quad \cdots\cdots (13)$$

(13)式より y_{max} は l が増加するにしたがつて増し，また t の増加にしたがつて増大することが判る。

そこでAについて計算を行うにあたつては，t も l も如何程でも大きくとり得るわけであるが，実際使用される範囲が諸種の条件によつて存在するようである。そこで既往の文献[3]よりみると大体次の範囲にある。

索長比 $\left(\frac{l}{u}\right)$: 1.001～1.010

勾　配　t　: 0.0～1.0

そこでAの数値計算にあたつては，索長比，勾配とも上限をとつて計算すれば，それまでの範囲では適用可能になるから，計算には $l/u=1.010$，$t=1.0$ を使用する。

数　値　計　算

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	0.0468	0.2026	0.3251	0.4369	0.5415	0.6404	0.7338	0.8214	0.9019	0.9716	1.008
$\varphi(x)$	0.0666	0.0050	0.0026	0.0019	0.0017	0.0017	0.0019	0.0024	0.0039	0.0103	0.3847
$A=\int_0^x \varphi(x)dx$	0.0000	0.0023	0.0026	0.0029	0.0030	0.0032	0.0034	0.0036	0.0039	0.0045	0.0157

滑車と索の摩擦係数 μ はボールベアリング入りの滑車を用いるとして0.003を用いた。

この数値計算の結果よりAをみると，上・下両支点附近では開きがあるが，x が0.1～0.9の範囲では殆んど等しいとみられる。したがつて，前述のAは一定とみなして差支えないものと考えられる。それ故に荷重点の軌跡が既知の場合には(7)式より簡単に任意の荷重点の速度が求められることとなる。

なお，索長比が1,000なる場合，荷重が0なる場合および荷重が∞の場合の荷重点の速度 (V^2x) を表示すれば次の通りである。

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
l/u=1.000の場合	0.0000	0.0997	0.1994	0.2991	0.3988	0.4985	0.5982	0.6979	0.7976	0.8973	0.9970
荷重0の場合	0.0000	0.1467	0.2814	0.4049	0.5177	0.6203	0.7133	0.7971	0.8721	0.9386	0.9970
荷重∞の場合	0.0000	0.2023	0.3245	0.4360	0.5403	0.6389	0.7320	0.8193	0.8995	0.9689	0.9970

（注） 上表の数値に2 gを掛けるものとする。

参 考 文 献

1) 佐々木功：架空索における動的理論の研究―走行荷重により遠心力を受ける架空索―日・林・誌，Vol. 41, No. 11, 1959.
2) 佐々木功：架空索道の荷重点の軌跡（第9報）日・林・関西支部大会講演集 No. 5, 1955.
3) 加藤誠平：林業用索道設計法 1959.
4) 苫名孝太郎：架空索道計算法 1935.
5) Duhm, J.: Riesanlagen und Seilbahnen (Leo Hauska-Das Forstliche Bauingenieurwessen, Bd. 1) 1933.

Résumé

In order to consider the problems on the kinetic theory of the aerial cableway in a case of running load, the velocity of running load was researched theoretically.

Assuming that the locus of running load on the aerial cableway [$y=f(x)$] is recognized, the velocity of the running load at any point x [V_x] is calculated from the next equation.

$$V_x^2=\frac{1}{e^A}\left(2ge^Ay-2ge^A\mu x\right)$$

here : A: $2\mu\int_0^x\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$

μ: coefficient of friction between the carriage and the wire rope

e: Napier's constant